Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Madrid 2021, Ordinaria

mentoor.es

Ejercicio 1. Opción A. Álgebra

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A,B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Solución:

Encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Definición de variables: Sean x, y, z el número total de acciones de las empresas A, B y C, respectivamente. Sean V_A, V_B, V_C el valor en bolsa por acción de cada empresa.

Datos del problema:

- Total de acciones: $x + y + z = 540$.
- Valor total: $xV_A + yV_B + zV_C = 1560$.
- Valor de la acción B: $V_B = 1$ euro.
- Relación de valores: $V_A = 3V_B = 3(1) = 3$. $V_A = V_C/2 \implies V_C = 2V_A = 2(3) = 6$.
- Relación de número de acciones: $z = y/2 \implies y = 2z$.

Planteamiento del sistema de ecuaciones: Sustituimos los valores conocidos en las ecuaciones:

1. $x + y + z = 540$
2. $x(3) + y(1) + z(6) = 1560 \implies 3x + y + 6z = 1560$
3. $y = 2z$

Sustituimos la ecuación (3) en (1) y (2):

$$x + (2z) + z = 540 \implies x + 3z = 540$$

$$3x + (2z) + 6z = 1560 \implies 3x + 8z = 1560$$

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (x, z):

$$\begin{cases} x + 3z = 540 \\ 3x + 8z = 1560 \end{cases}$$

Resolución del sistema (2x2) por Regla de Cramer: La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. El determinante es $|M| = 1(8) - 3(3) = 8 - 9 = -1$. Como $|M| \neq 0$, el sistema es compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 540 & 3 \\ 1560 & 8 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{540(8) - 3(1560)}{-1} = \frac{4320 - 4680}{-1} = \frac{-360}{-1} = 360.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 540 \\ 3 & 1560 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{1(1560) - 540(3)}{-1} = \frac{1560 - 1620}{-1} = \frac{-60}{-1} = 60.$$

Ahora calculamos y usando la ecuación (3):

$$y = 2z = 2(60) = 120.$$

El número total de acciones es: $x = 360, y = 120, z = 60$.

Reparto equitativo: Las 540 acciones totales se reparten equitativamente entre 3 hermanos. Cada hermano recibe $540/3 = 180$ acciones en total. El número de acciones de cada tipo que le corresponde a cada hermano es:

$$\text{Acciones A por hermano} = \frac{x}{3} = \frac{360}{3} = 120$$

$$\text{Acciones B por hermano} = \frac{y}{3} = \frac{120}{3} = 40$$

$$\text{Acciones C por hermano} = \frac{z}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

$$\boxed{\textbf{A cada hermano le corresponden 120 acciones de A, 40 de B y 20 de C.}}$$

Ejercicio 2. Opción A. Análisis

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$\boldsymbol{f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x.}$$

Solución:

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas.

Igualamos las funciones para encontrar los puntos de intersección de las dos funciones (y, por tanto, los límites de integración):

$$f(x) = g(x) \implies 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x$$
$$0 = (2x^2 - 4x) - (2 + x - x^2)$$
$$0 = 3x^2 - 5x - 2$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Las soluciones son $x_1 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2$ y $x_2 = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$.

Los puntos de corte son $x = -1/3$ y $x = 2$.

Calculamos la función diferencia $d(x) = f(x) - g(x) = (2 + x - x^2) - (2x^2 - 4x) = -3x^2 + 5x + 2$.

Necesitamos saber qué función es mayor en el intervalo $(-1/3, 2)$. Evaluamos en un punto intermedio, por ejemplo $x = 0$:

$$d(0) = -3(0)^2 + 5(0) + 2 = 2 > 0$$

Como $d(x) > 0$ en el intervalo $(-1/3, 2)$, entonces $f(x) > g(x)$ en ese intervalo.

Cálculo del área:

El área A viene dada por la integral definida de la función diferencia $|f(x) - g(x)|$ entre los puntos de corte. Como $f(x) - g(x) \geq 0$ en $[-1/3, 2]$:

$$A = \int_{-1/3}^{2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1/3}^{2} (-3x^2 + 5x + 2)dx$$

Calculamos la primitiva:

$$\int (-3x^2 + 5x + 2)dx = -3\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 2x = -x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$A = \left[-x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x\right]_{-1/3}^{2}$$

$$A = \left(-(2)^3 + \frac{5}{2}(2)^2 + 2(2)\right) - \left(-(-\frac{1}{3})^3 + \frac{5}{2}(-\frac{1}{3})^2 + 2(-\frac{1}{3})\right)$$

$$A = \left(-8 + \frac{5}{2}(4) + 4\right) - \left(-(-\frac{1}{27}) + \frac{5}{2}(\frac{1}{9}) - \frac{2}{3}\right)$$

$$A = (-8 + 10 + 4) - \left(\frac{1}{27} + \frac{5}{18} - \frac{2}{3}\right)$$

$$A = 6 - \left(\frac{1 \cdot 2}{54} + \frac{5 \cdot 3}{54} - \frac{2 \cdot 18}{54} \right)$$
$$A = 6 - \left(\frac{2 + 15 - 36}{54} \right) = 6 - \left(\frac{-19}{54} \right) = 6 + \frac{19}{54}$$
$$A = \frac{6 \cdot 54}{54} + \frac{19}{54} = \frac{324 + 19}{54} = \frac{343}{54}$$

$$\boxed{\textbf{El área de la región delimitada es } \frac{\mathbf{343}}{\mathbf{54}} \textbf{ unidades cuadradas.}}$$

Ejercicio 3. Opción A. Geometría

Sean la recta

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}},$$

y el plano $\boldsymbol{\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0}$. Se pide:

a) **Calcular el ángulo que forman $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{\pi}$.**
b) **Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano $\boldsymbol{\pi}$ con respecto al plano $\boldsymbol{z - y = 0}$.**
c) **Determinar la proyección ortogonal de la recta sobre el plano $\boldsymbol{\pi}$.**

Solución:

a) **Calcular el ángulo que forman $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{\pi}$.**

Vector director de la recta r, $\vec{d_r}$: Es perpendicular a los vectores normales de los planos que la definen, $\vec{n_1} = (-1, -1, 1)$ y $\vec{n_2} = (2, 3, -1)$.

$$\vec{d_r} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1-3) - \vec{j}(1-2) + \vec{k}(-3-(-2)) = (-2, 1, -1).$$

Vector normal del plano π, $\vec{n_\pi} = (2, 1, -1)$.

El ángulo α entre la recta r y el plano π cumple $\sin\alpha = \frac{|\vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi}|}{|\vec{d_r}||\vec{n_\pi}|}$.

$$\vec{d_r} \cdot \vec{n_\pi} = (-2, 1, -1) \cdot (2, 1, -1) = (-2)(2) + 1(1) + (-1)(-1) = -4 + 1 + 1 = -2.$$

$$|\vec{d_r}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

$$|\vec{n_\pi}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

$$\sin\alpha = \frac{|-2|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right).$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha = \arcsin(1/3) = 19,47^\circ}}$$

b) **Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano $\boldsymbol{\pi}$ con respecto al plano $\boldsymbol{z - y = 0}$.**

Primero, buscaremos el punto de intersección entre r y π: Necesitamos la ecuación paramétrica de r.

Un punto P_r de r: Si $y = 0$, $\begin{cases} -x + z = 0 \implies z = x \\ 2x - z + 1 = 0 \implies 2x - x + 1 = 0 \implies x = -1 \end{cases}$

Así $P_r(-1, 0, -1)$. Ecuación paramétrica de r:

$$r \equiv (x, y, z) = (-1, 0, -1) + \lambda(-2, 1, -1) = (-1 - 2\lambda, \lambda, -1 - \lambda).$$

Sustituimos en la ecuación del plano $\pi : 2x + y - z + 3 = 0$:

$$2(-1 - 2\lambda) + (\lambda) - (-1 - \lambda) + 3 = 0$$

$$-2 - 4\lambda + \lambda + 1 + \lambda + 3 = 0$$

$$-2\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = 1.$$

El punto de intersección es $P = (-1 - 2(1), 1, -1 - 1) = (-3, 1, -2)$.

El plano respecto al cual buscaremos la simetría es el: $\sigma \equiv z - y = 0 \implies -y + z = 0$. Vector normal $\vec{n_\sigma} = (0, -1, 1)$.

Para hallar el simétrico respecto al plano σ, hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por P: $\vec{d_s} = \vec{n_\sigma} = (0, -1, 1)$.

$$s \equiv (x, y, z) = (-3, 1, -2) + t(0, -1, 1) = (-3, 1 - t, -2 + t).$$

Hallamos el punto $M = s \cap \sigma$ (proyección de P_{int} sobre σ):

$$-(1 - t) + (-2 + t) = 0 \implies -1 + t - 2 + t = 0 \implies 2t - 3 = 0 \implies t = 3/2.$$

El punto medio M es $M = (-3, 1 - 3/2, -2 + 3/2) = (-3, -1/2, -1/2)$.

El punto simétrico P' cumple $M = \frac{P_{int}+P'}{2} \implies P' = 2M - P_{int}$.

$P' = 2(-3, -1/2, -1/2) - (-3, 1, -2) = (-6, -1, -1) - (-3, 1, -2) = (-6+3, -1-1, -1+2) = (-3, -2, 1)$.

$$\boxed{\textbf{El punto simétrico es } \boldsymbol{P'(-3, -2, 1)}.}$$

c) Determinar la proyección ortogonal de la recta sobre el plano π.

La proyección r' es la intersección del plano π con el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.
Plano π':

Contiene a r (pasa por $P_r(-1, 0, -1)$ y tiene vector $\vec{d_r} = (-2, 1, -1)$).
Es perpendicular a π (vector normal $\vec{n_\pi} = (2, 1, -1)$).
El vector normal a π', $\vec{n_{\pi'}}$, es perpendicular a $\vec{d_r}$ y $\vec{n_\pi}$.

$$\vec{n_{\pi'}} = \vec{d_r} \times \vec{n_\pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1 - (-1)) - \vec{j}(2 - (-2)) + \vec{k}(-2 - 2) = (0, -4, -4).$$

Podemos usar $\vec{n_{\pi'}} = (0, 1, 1)$.

La ecuación de π' es $0x + 1y + 1z + D = 0$. Pasa por $P_r(-1, 0, -1)$:

$$0(-1) + 1(0) + 1(-1) + D = 0 \implies -1 + D = 0 \implies D = 1.$$

El plano es $\pi' \equiv y + z + 1 = 0$.

Recta proyección r': Es la intersección de π y π'.

$$r' \equiv \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\textbf{La proyección ortogonal es la recta } \boldsymbol{r' \equiv \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}}.}$$

Ejercicio 4. Opción A. Probabilidad

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) **¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?**

b) **Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?**

c) **¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98% de los individuos de esta especie?**

Solución:

a) **¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?**
Sea T la variable aleatoria "tiempo de vida en meses". $T \sim N(\mu = 8.8, \sigma = 3)$.
Sea $Z = \frac{T-\mu}{\sigma}$ la variable normal estándar, $Z \sim N(0,1)$. $P(T > 10)$.
Estandarizamos: $Z = \frac{10-8.8}{3} = \frac{1.2}{3} = 0.4$.

$$P(T > 10) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4)$$

Usando la tabla N(0,1), $P(Z \leq 0.4)$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

$$P(T > 10) = 1 - 0.6554 = 0.3446.$$

El porcentaje es 34.46%.

Porcentaje entre 7 y 10 meses: $P(7 < T < 10)$. Estandarizamos ambos límites: $Z_1 = \frac{7-8.8}{3} = \frac{-1.8}{3} = -0.6$. $Z_2 = 0.4$.

$$\begin{aligned} P(7 < T < 10) &= P(-0.6 < Z < 0.4) = P(Z < 0.4) - P(Z < -0.6) \\ &= P(Z < 0.4) - P(Z > 0.6) \\ &= P(Z < 0.4) - (1 - P(Z \leq 0.6)) \end{aligned}$$

De la tabla, $P(Z \leq 0.4) = 0.6554$ y $P(Z \leq 0.6) = 0.7257$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852

$$P(7 < T < 10) = 0.6554 - (1 - 0.7257) = 0.6554 - 0.2743 = 0.3811.$$

El porcentaje es 38.11%.

Supera 10 meses: 34.46%
Entre 7 y 10 meses: 38.11%

b) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

Sea p la probabilidad de que un espécimen no supere los 10 meses: $p = P(T \leq 10) = 1 - P(T > 10) = 1 - 0.3446 = 0.6554$.
Sea X la variable aleatoria "número de especímenes (de 4) que no superan los 10 meses".
X sigue una distribución binomial $B(n = 4, p = 0.6554)$.
Buscamos la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses, $P(X \geq 1)$.
Es el suceso contrario a que ninguno no supere los 10 meses ($X = 0$), que es lo mismo que decir que todos superan los 10 meses.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} p^0 (1-p)^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 0.6554)^4 = (0.3446)^4$$

$$(0.3446)^4 \approx 0.014116$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0.014116 \approx 0.985884$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(X \geq 1) \approx 0.9859}}$$

c) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida del 98% de los individuos?

Buscamos c tal que $P(8.8 - c < T < 8.8 + c) = 0.98$. Estandarizando:

$$P\left(\frac{-c}{3} < Z < \frac{c}{3}\right) = 0.98$$

Por simetría, $P(Z < c/3) = (1 + 0.98)/2 = 0.99$.

Buscamos en la tabla N(0,1) el valor z_0 tal que $P(Z < z_0) = 0.99$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974

El valor más cercano en la tabla es 0.9901, que corresponde a $z_0 = 2.33$. Entonces, $\frac{c}{3} \approx 2.33$.

$$c \approx 3 \times 2.33 = 6.99$$

$$\boxed{\boldsymbol{c \approx 6.99}}$$

Ejercicio 1. Opción B. Álgebra

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} ax - 2y + (a-1)z &= 4 \\ -2x + 3y - 6z &= 2 \\ -ax + y - 6z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

a) **Discuta el sistema según los diferentes valores de a.**
b) **Resuelva el sistema para $a = 1$.**

Solución:

a) **Discuta el sistema según los diferentes valores de a.**

Matrices del sistema: Matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

Determinante de A:

$$\begin{aligned} |A| &= a(-18-(-6)) - (-2)(12-6a) + (a-1)(-2-(-3a)) \\ &= a(-12) + 2(12-6a) + (a-1)(-2+3a) \\ &= -12a + 24 - 12a + (3a^2 - 2a - 3a + 2) \\ &= -24a + 24 + 3a^2 - 5a + 2 \\ &= 3a^2 - 29a + 26 \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero: $3a^2 - 29a + 26 = 0$.

$$a = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4(3)(26)}}{2(3)} = \frac{29 \pm \sqrt{841-312}}{6} = \frac{29 \pm \sqrt{529}}{6} = \frac{29 \pm 23}{6}$$

Las raíces son $a_1 = \frac{29+23}{6} = \frac{52}{6} = \frac{26}{3}$ y $a_2 = \frac{29-23}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Discusión por casos (Teorema de Rouché-Frobenius):

Caso 1: Si $a \neq 1$ y $a \neq 26/3$. $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. Como A^* es 3×4, $\text{Rg}(A^*) = 3$. $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 3$ (número de incógnitas) $\implies$ **S.C.D.**

Caso 2: Si $a = 1\ implies |A| = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$\text{Rg}(A) = 2$ (ya que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$).

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)$.

Se puede ver como la Fila 1 = Fila 3 - Fila 2. Por lo tanto, $\text{Rg}(A*) = 2$
$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3 \implies$ **S.C.I.** (1 grado de libertad).

Caso 3: Si $a = 26/3$.
$|A| = 0$.
$\text{Rg}(A) = 2$ (ya que $\begin{vmatrix} 26/3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 26 - 4 = 22 \neq 0$).
$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 26/3 & -2 & 23/3 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26/3 & 1 & -6 & 6 \end{array} \right)$.
Calculamos el menor $\begin{vmatrix} 26/3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -26/3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{16}{3} + 240 \neq 0$
$\text{Rg}(A^*) = 3$.
$\text{Rg}(A) = 2 \neq \text{Rg}(A^*) = 3 \implies$ **S.I.**

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Si } \ \boldsymbol{a \neq 1, a \neq 26/3 \Rightarrow} \ \textbf{S.C.D.} \\ \textbf{Si } \ \boldsymbol{a = 1 \Rightarrow} \ \textbf{S.C.I.} \\ \textbf{Si } \ \boldsymbol{a = 26/3 \Rightarrow} \ \textbf{S.I.} \end{array}}$$

b) Resuelva el sistema para $\boldsymbol{a = 1}$.

Para $a = 1$, el sistema es S.C.I. con $\text{Rg}(A) = 2$. Usamos las dos primeras ecuaciones (L.I.) y tomamos $z = t$ como parámetro.

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 3y = 2 + 6t \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la sumamos a la segunda:

$$(2x - 4y) + (-2x + 3y) = (8) + (2 + 6t)$$

$$-y = 10 + 6t \implies y = -10 - 6t$$

Sustituimos y en la primera ecuación:

$$x = 4 + 2y = 4 + 2(-10 - 6t) = 4 - 20 - 12t = -16 - 12t$$

La solución general es $(x, y, z) = (-16 - 12t, -10 - 6t, t)$ para $t \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\textbf{Solución para } \ \boldsymbol{a = 1 : (x, y, z) = (-16 - 12t, -10 - 6t, t), \quad t} \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 2. Opción B. Análisis

Se considera la función

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{si } x<0\\ xe^x & \text{si } x\geq 0\end{cases}}$$

a) **Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $\boldsymbol{x=0}$.**
b) **Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $\boldsymbol{(-\pi,2)}$. Demuestre que existe un punto $\boldsymbol{x_0\in[0,1]}$ de manera que $\boldsymbol{f(x_0)=2}$.**
c) **Calcule $\boldsymbol{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx}$.**

Solución:

a) **Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $\boldsymbol{x=0}$.**

Continuidad:
$f(0)=0e^0=0$.
$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sin x=\sin 0=0$.
$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} xe^x=0e^0=0$.
Como $f(0)$ y los límites laterales coinciden, $f(x)$ es continua en $x=0$.

Derivabilidad:
Calculamos $f'(x)$:
$f'(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x<0\\ e^x(1+x) & \text{si } x>0\end{cases}$.
$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=\cos 0=1$.
$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} e^x(1+x)=e^0(1+0)=1$.
Como $f'(0^-)=f'(0^+)=1$, la función es derivable en $x=0$.

$$\boxed{\textbf{La función } \boldsymbol{f(x)} \textbf{ es continua y derivable en } \boldsymbol{x=0}.}$$

b) **Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $\boldsymbol{(-\pi,2)}$. Demuestre que existe $\boldsymbol{f(x_0)=2}$ en $\boldsymbol{[0,1]}$.**

Monotonía en $(-\pi,2)$:
Intervalo $(-\pi,0)$: $f'(x)=\cos x$.
$\cos x=0$ en $x=-\pi/2$.
Combinando: $f(x)$ decrece en $(-\pi,-\pi/2)$ y crece en $(-\pi/2,2)$. Mínimo relativo en $x=-\pi/2$.

Tabla de monotonía en $(-\pi,2)$:

Intervalo	$(-\pi,-\pi/2)$	$(-\pi/2,2)$
Signo de $\boldsymbol{f'(x)}$	$-$	$+$
Comportamiento de $\boldsymbol{f(x)}$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x)$ decrece en $(-\pi,-\pi/2)$ y crece en $(-\pi/2,2)$. Mínimo relativo en $x=-\pi/2$.

Existencia de x_0:
Consideramos $f(x)=xe^x$ en $[0,1]$. $f(x)$ es continua en este intervalo.
$f(0)=0$. $f(1)=1e^1=e\approx 2.718$.
Buscamos $k=2$. Como $f(0)<2<f(1)$, por el Teorema del Valor Intermedio (consecuencia de Bolzano), existe al menos un $x_0\in(0,1)$ tal que $f(x_0)=2$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Decreciente en } (-\pi, -\pi/2)\textbf{. Creciente en } (-\pi/2, 2)\textbf{.}\\ \textbf{La existencia de } x_0 \textbf{ está garantizada por el Teorema del Valor Intermedio.}\end{array}}$$

c) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

$$\int_{-\pi/2}^{1} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{0} \sin x dx + \int_{0}^{1} xe^x dx$$

Primera integral:

$$\int_{-\pi/2}^{0} \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi/2}^{0} = (-\cos 0) - (-\cos(-\pi/2)) = -1 - 0 = -1.$$

Segunda integral (por partes): $u = x, dv = e^x dx \implies du = dx, v = e^x$.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1).$$

$$\int_{0}^{1} xe^x dx = [e^x(x-1)]_0^1 = (e^1(1-1)) - (e^0(0-1)) = 0 - (1(-1)) = 1.$$

Suma:

$$\int_{-\pi/2}^{1} f(x)dx = -1 + 1 = 0.$$

$$\boxed{\int_{-\pi/2}^{1} f(x)dx = 0}$$

Ejercicio 3. Opción B. Geometría

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) **Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.**
b) **Halle la recta que pasa por el punto (0,2,0) y es perpendicular al plano π_2.**
c) **Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.**

Solución:

a) **Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.**

Un plano π' paralelo a $\pi_1 \equiv x + y - 1 = 0$ tiene la forma $\pi' \equiv x + y + D = 0$.

La distancia del origen $O(0,0,0)$ al plano π' es:

$$d(O, \pi') = \frac{|1(0) + 1(0) + 0(0) + D|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{2}}.$$

Queremos $d(O, \pi') = 2$:

$$\frac{|D|}{\sqrt{2}} = 2 \implies |D| = 2\sqrt{2}.$$

Esto da dos soluciones: $D = 2\sqrt{2}$ y $D = -2\sqrt{2}$.

Los planos son $\pi'_1 \equiv x + y + 2\sqrt{2} = 0$ y $\pi'_2 \equiv x + y - 2\sqrt{2} = 0$.

$$\boxed{\textbf{Los planos son } x + y + 2\sqrt{2} = 0 \textbf{ y } x + y - 2\sqrt{2} = 0.}$$

b) **Halle la recta que pasa por el punto (0,2,0) y es perpendicular al plano π_2.**

Sea s la recta buscada. Pasa por $P(0,2,0)$. $\pi_2 \equiv x + 0y + z - 1 = 0$. Su vector normal es $\vec{n_2} = (1,0,1)$.

Como $s \perp \pi_2$, el vector director de s, $\vec{d_s}$, es paralelo a $\vec{n_2}$. Podemos tomar $\vec{d_s} = (1,0,1)$.

La ecuación paramétrica de s es:

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 + 1\lambda = \lambda \\ y = 2 + 0\lambda = 2 \\ z = 0 + 1\lambda = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\textbf{La recta es } s \equiv (x, y, z) = (\lambda, 2, \lambda).}$$

c) **Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.**

Plano $\pi_1 \equiv x + y = 1$.

Intersección con eje X ($y = 0, z = 0$): $x + 0 = 1 \implies x = 1$. Punto $P_X(1,0,0)$.

Intersección con eje Y ($x = 0, z = 0$): $0 + y = 1 \implies y = 1$. Punto $P_Y(0,1,0)$.

Distancia entre P_X y P_Y:

$$d(P_X, P_Y) = |\vec{P_X P_Y}| = |P_Y - P_X| = |(0-1, 1-0, 0-0)| = |(-1,1,0)|$$

$$d(P_X, P_Y) = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\textbf{La distancia es } \sqrt{\mathbf{2}}.}$$

Ejercicio 4. Opción B. Probabilidad

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2 la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2 la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?**
b) **¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?**
c) **¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2 " y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?**
d) **¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?**

Solución:

a) **¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?**
Definición de sucesos: Sea N = "se supera el nivel permitido de NO_2". Sea P = "se supera el nivel permitido de partículas".

Datos: $P(N) = 0.16$.
$P(P|N) = 0.33$.
$P(P|\overline{N}) = 0.08$.

Probabilidades complementarias: $P(\overline{N}) = 1 - P(N) = 1 - 0.16 = 0.84$.

En el apartado se pide: $P(N \cap P)$.
Usamos la definición de probabilidad condicionada: $P(P|N) = \frac{P(N\cap P)}{P(N)}$.

$$P(N \cap P) = P(P|N) \cdot P(N) = 0.33 \times 0.16 = 0.0528.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(N \cap P) = 0.0528}}$$

b) **¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?**

Buscamos $P(N \cup P)$. Usamos la fórmula $P(N \cup P) = P(N) + P(P) - P(N \cap P)$. Necesitamos calcular $P(P)$. Usamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(P) = P(P|N)P(N) + P(P|\overline{N})P(\overline{N})$$

$$P(P) = (0.33)(0.16) + (0.08)(0.84) = 0.0528 + 0.0672 = 0.12.$$

Ahora calculamos la unión:

$$P(N \cup P) = 0.16 + 0.12 - 0.0528 = 0.28 - 0.0528 = 0.2272.$$

$$\boxed{\boldsymbol{P(N \cup P) = 0.2272}}$$

c) **¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2 " y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?**

Dos sucesos son independientes si $P(N \cap P) = P(N) \cdot P(P)$. Calculamos $P(N) \cdot P(P)$:

$$P(N) \cdot P(P) = 0.16 \times 0.12 = 0.0192.$$

Comparamos con $P(N \cap P)$ calculado en a):

$$P(N \cap P) = 0.0528.$$

Como $0.0528 \neq 0.0192$, los sucesos N y P no son independientes.

$$\boxed{\textbf{Los sucesos NO son independientes.}}$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Buscamos $P(N|\overline{P})$. Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(N|\overline{P}) = \frac{P(N \cap \overline{P})}{P(\overline{P})}$$

Calculamos $P(\overline{P}) = 1 - P(P) = 1 - 0.12 = 0.88$. Calculamos $P(N \cap \overline{P})$. Podemos usar $P(N) = P(N \cap P) + P(N \cap \overline{P})$.

$$P(N \cap \overline{P}) = P(N) - P(N \cap P) = 0.16 - 0.0528 = 0.1072.$$

Ahora calculamos la probabilidad condicionada:

$$P(N|\overline{P}) = \frac{0.1072}{0.88} = \frac{1072}{8800} = \frac{67}{550}.$$

Aproximadamente $P(N|\overline{P}) \approx 0.1218$.

$$\boxed{\boldsymbol{P(N|\overline{P}) = \frac{67}{550} \approx 0.1218}}$$